1.1.2 Widerstandsmessung

Sachworte: Messfehler (bekannte, systematische Einflüsse), Messabweichung (synonym zu „Messfehler“), Widerstandsmessung

Der Wert eines Ohmschen Widerstandes R soll durch eine getrennte Strom- und Spannungsmessung und Anwendung des Ohmschen Gesetzes ermittelt werden. Gemessen wurden ein Strom I = 700 mA und eine Spannung U = 8,0 V, die mit systematischen Messfehler von ΔI = 15 mA; ΔU = -100 mV behaftet waren.

Wie groß ist der absolute bzw. relative Messfehler F_{abs} bzw. F_{rel}?

Die Strommessung liefert den Wert I und die Spannungsmessung den Wert U, aus denen der Widerstand R nach dem Ohmschen Gesetz berechnet wird.

$$R = \frac{U}{I}$$

Nach Gl. (1.34) des Buches gilt für den absoluten Messfehler bei kleinen Fehlern Δx_i:

$$F_{abs} = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i = \frac{\partial R}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial R}{\partial I} \Delta I = \frac{1}{I} \Delta U - \frac{U}{I^2} \Delta I \qquad (1)$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$F_{abs} = \frac{-100mV}{700mA} - \frac{8\,V}{(700mA)^2} 15mA = -0{,}388\Omega \qquad (2)$$

Der relative Fehler berechnet sich definitionsgemäß aus dem absoluten Fehler durch Division mit dem sog. Bezugswert BZW, für den hier der wahre Wert R = U/I des Widerstandes angesetzt wird.

$$F_{rel} = \frac{F_{abs}}{BZW} \quad mit \quad BZW = \frac{U}{I} \qquad (3)$$

$$F_{rel} = \frac{\left(\frac{1}{I} \Delta U - \frac{U}{I^2} \Delta I \right)}{U/I} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I} = \varepsilon_U - \varepsilon_I \qquad (4)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U} = \frac{-100mV}{8{,}0V} = -\,0{,}0125 = -\,1{,}25\,\% \quad ;$$
$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{15mA}{700mA} = 0{,}0214 = +2{,}14\,\% \qquad (5)$$

$$F_{rel} = \varepsilon_U - \varepsilon_I = -0{,}0125 - 0{,}0214 = -0{,}0339 = -3{,}39\,\% \qquad (6)$$

Ein schnellerer Lösungsweg ergibt sich mit der Rechenregel für multiplikativ verknüpfte Größen.

$$y = \prod_{1}^{n} b_i e^{a_i} \quad \Rightarrow \quad F_{rel} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \qquad (7)$$

Auf das gegebene Beispiel angewendet

$$y = R = \frac{U}{I} = 1 \cdot U^1 \cdot 1 \cdot \left(I\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = +1 \text{ und } a_2 = -1 \qquad (8)$$

lässt sich das Ergebnis mit ε_1 = ε_U = $\Delta U/U$ und ε_2 = ε_I = $\Delta I/I$ direkt ohne weitere Rechnung angeben.

$$F_{rel} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 = \varepsilon_U - \varepsilon_I = -0{,}0125 - 0{,}0214 = -0{,}0339 = -3{,}39\,\% \qquad (9)$$

Hinweis: In der Übung wurde in Übereinstimmung mit dem Buch für bekannte, systematische Einflüsse der Begriff „Fehler“ verwendet, der mit gleicher Bedeutung in der Literatur häufig als „Messabweichung“ bezeichnet wird.